Sistem Persamaan Linier (SPL) dengan Eliminasi Gauss

Oleh :

Mike Yuliana

Definisi SPL

- Suatu sistem yang merupakan gabungan dari beberapa persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

- SPL diatas mempunyai m persamaan dan n variabel
- SPL mempunyai minimal sebuah solusi, disebut konsisten, jika tidak mempunyai solusi disebut tidak konsisten

SPL

- Bentuk persamaan linier simultan dengan *n* persamaan dan *n* variabel bebas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bentuk Matrik SPL

- SPL dengan m persamaan dan n variabel

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- Bentuk SPL dapat ditulis dengan

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

- Dapat ditulis Ax = B

Bentuk Matrik SPL

- Dimana A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- A adalah matrik koefisien dari SPL (matrik Jacobian).
- Vektor x disebut vektor variabel
- Vektor B disebut vektor konstanta

Augmented Matrik

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh

x + 3y + 2z = 44

x + 4y + z = 49

2x + 5y + 5z = 83

- Bentuk matrik SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 49 \\ 83 \end{bmatrix}$$

- Augmented Matrik

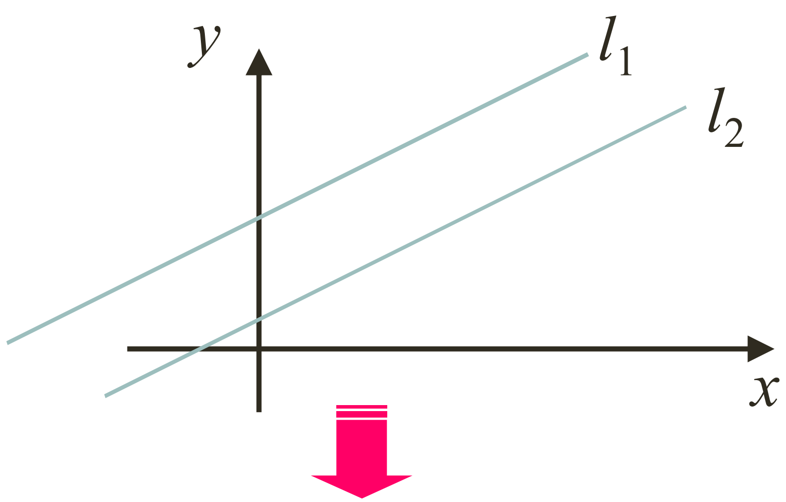
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 44 \\ 1 & 4 & 1 & 49 \\ 2 & 5 & 5 & 83 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian SPL

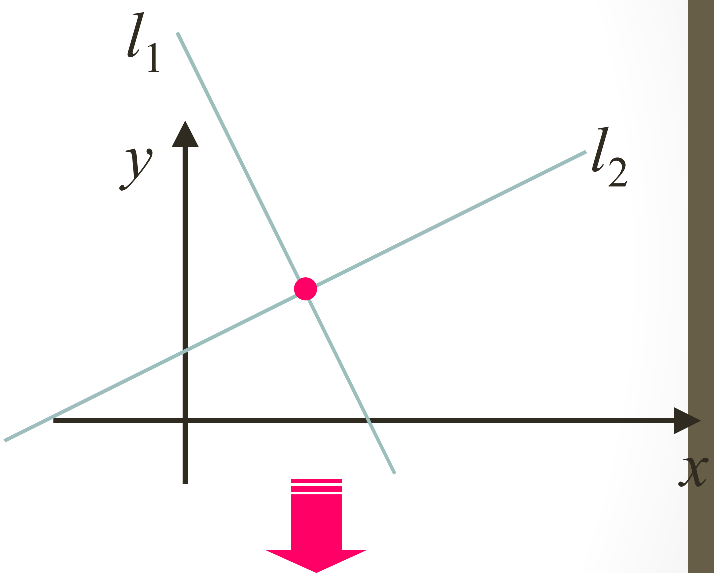
- Berdasarkan penyelesaiannya, SPL dibedakan menjadu 3 macam:
  - Tidak mempunyai penyelesaian (*no solutions*)
  - Tepat satu penyelesaian (*exactly one solution*)
  - Banyak penyelesaian(*infinitely many solutions*)

Penyelesaian SPL

- **Secara geometri** penyelesaian sist pers linier untuk **2 var bebas** dapat digambarkan:



Tidak mempunyai penyelesaian



Mempunyai 1 penyelesaian

Operasi-operasi Dasar (Elementary Operations)

- Terdapat dua tahap untuk menyelesaikan SPL yaitu:
  - Reduksi sistem (mengeliminasi variabel)
  - Mendeskripsikan himpunan penyelesaian
- Tujuan dari reduksi sistem adalah untuk menyederhanakan SPL dengan mengeliminasi variabel-variabel, sehingga sistem yang dihasilkan mempunyai himpunan penyelesaian yang sama dengan sistem aslinya.

Sistem *equivalent*

- Definisi

  Dua SPL dengan n variabel disebut *equivalent* jika SPL tersebut mempunyai himpunan penyelesaian yang sama

Operasi Baris Elementer

- Untuk reduksi sistem, SPL menggunakan operasi baris elementer (elementary row operations). Terdapat 3 operasi :
  - Menukar dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$)
  - Mengalikan sebuah baris dengan sebuah skalar

    ($k R_i$)
  - Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. ($R_i + kR_j$)

Operasi Baris Elementer

- Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. (R_i + kR_j)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B2 – 2B1 artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen pada baris ke satu

- $-2B_1$: -2 -2 -4 -18

  B_2 : 2 4 -3 1

  B2 – 2B1 : 0 2 -7 -17 (menjadi elemen baris ke-2)

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \quad \xrightarrow{1/2B_2} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{1/2B_2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal `x=1,y=2,z=3`
- Proses reduksi pada contoh diatas disebut ***Eliminasi Gauss-Jordan***

Contoh

$$2x_2 + x_3 = -2$$

$$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - 2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + 5B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal yaitu x1=7, x2=-2 dan x3=-2

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(a)

Dari matrik augmented SPL direduksi dengan operasi baris elementer diperoleh bentuk reduced echelon form. Terdapat 4 kemungkinan penyelesaian seperti berikut :

$$(a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (a)

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 5 \\ y \quad &= -2 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(b1)

$$(b)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (b)

Variabel bebas (free variables)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$-3x_2 - 3x_3 = -6$$

Variabel depan (leading variables)

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(b2)

$x_1 = 10 - 5x_3$
$x_2 = 3 - x_3$

Variabel bebas dapat diisi dengan sembarang nilai k, selanjutnya dapat ditentukan variabel depan

Terdapat banyak penyelesaian, penyelesaian secara umum diberikan dengan menggunakan formula

$x_1 = 10 - 5k$
$x_2 = 3 - xk_3$
$x_3 = k$

3 Kemungkinan Penyelesaian SPL(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (c)

1. Persamaan yang bersesuai dengan baris terakhir tsb adalah
2. Tidak ada nilai x_i yang memenuhi persamaan tersebut $\longrightarrow$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Metode Eliminasi Gauss

- Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- matrik diubah menjadi augmented matrik :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Contoh :

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 6 \\
1 & 2 & -1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 10
\end{bmatrix}
$$

Contoh :

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{array}{l} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- Penyelesaian :

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4 - (2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6 - 2 - 3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(3) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n, perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(4) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer:

- Hitung $c = \dfrac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$
- Untuk kolom k dimana k=1 s/d n+1

  hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(5) Hitung akar, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}x_n\right)$$

dimana nilai i+k≤n