Sistem Persamaan Linier (SPL) dengan Eliminasi Gauss Jordan

Oleh :

Mike Yuliana

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3,…,dn dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/1)

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Lakukan operasi baris elementer

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan :
$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/4)

$$\begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2-2B_1} \begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3-3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2-2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3-3B_1}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (2/4)

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2y - 7z &= -17 \\
3y - 11z &= -27
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \quad
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\
3y - 11z &= 0
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}
\quad \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}
\quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}
$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (3/4)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= \quad 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= \quad 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= \quad 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (4/4)

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \qquad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Solusi x = 1, y=2 dan z=3

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n
(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A
(4) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n
(a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :
Bila ya :
pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.
Bila tidak : lanjutkan
(b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
(6) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n
Lakukan operasi baris elementer: untuk kolom k dimana k=1 s/d n
Hitung $c = a_{j,i}$
Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$
(7) Penyelesaian, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)
$x_i = a_{i,n+1}$